Örnek: 4 ~~simetrik~~ hilesiz parayı 1 kez atalım. X t.d. Turaların sayısını göstersin. $f(x)$ ve $F(x)$'i bulunuz.

Çözüm: Bir paranın 4 kez atılması deneyinde örnek uzayını düşünelim:

$$S = \{TYYY, TYTY, TYTT, TTYY, TTYT, TTTT, TTTY, YYYY, YYYT, YYTT, YYTY, YTYY, YTYT, YTTY, YTTT\}$$

$X=x$	0	1	2	3	4
$f(x)=P(X=x)$	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16
$F(x)=P(X\leq x)$	1/16	5/16	11/16	15/16	1

$f(0)=\frac{1}{16}$, $f(1)=\frac{4}{16}$, $f(2)=\frac{6}{16}$, $f(3)=\frac{4}{16}$

$f(4)=\frac{1}{16}$ old. dan,

$F(0)=f(0)=\frac{1}{16}$,

$F(1)=\underbrace{f(0)+f(1)}_{P(X\leq 1)}=\frac{5}{16}$

$F(2)=f(0)+f(1)+f(2)=\frac{11}{16}$

$F(3)=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=\frac{15}{16}$

$F(4)=1$

Böylece dağılım fonksiyonu,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1/16, & 0\leq x<1 \\ 5/16, & 1\leq x<2 \\ \frac{11}{16}, & 2\leq x<3 \\ 15/16, & 3\leq x<4 \\ 1, & x\geq 4 \end{cases}$$

olur.

Örnek: X, r.d. nin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} k.(1-x) , & 0 < x < 1 \\ 0 , & d.h. \end{cases}$$

veriliyor.

a.) k sabitini bulunuz.

b.) F(x) dağılım fonksiyonunu bulunuz.

c.) $p(X \leq \frac{1}{2}) = ?$

Çözüm: a.) f(x)' in olasılık fonksiyonu olması için

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \text{ olmalı.}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 k.(1-x).dx = k.x - \frac{kx^2}{2}\Big|_0^1 = 1$$

$$\Rightarrow k - \frac{k}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{k=2} \text{ bulunur.}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2.(1-x) , & 0<x<1 \\ 0 , & d.h. \end{cases}$$

yazılır.

b.) $F(x) = p(X \leq x)$

$$= \int_0^x f(u).du = \int_0^x 2.(1-u)\,du$$

$$= 2u - u^2\Big|_0^x = 2x - x^2 \,//$$

$$f(x) = \frac{\partial}{\partial x} F(x) = 2 - 2x = 2.(1-x) \text{ idi}$$

böylece,

$$F(x) = \begin{cases} 0 , & x < 0 \\ 2x - x^2 , & 0 \leq x < 1 \\ 1 , & x \geq 1 \end{cases}$$

yazılır.

c.) $$p(X \leq \tfrac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x).dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 2.(1-x)\,dx$$

$$= 2x - x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \,//$$

Veya $$p(X \leq \tfrac{1}{2}) = p(0 \leq X \leq \tfrac{1}{2}) = F(\tfrac{1}{2}) - F(0)$$

$$= 1 - \frac{1}{4} - 0 = \frac{3}{4} \text{ bulunur.}$$

* **Örnek** : Belli tipteki elektrik ampüllerinin dayanma süresi (saat) X t.d. ile gösterilsin ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^3}, & 1500 \leq x \leq 2500 \\ 0, & d.h. \end{cases}$$

verilsin..

a.) a sabitini bulunuz.

b.) Seçilmiş bir ampülün 2000 saatten fazla dayanma olasılığını bulunuz.

Çözüm : a.) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x).dx = 1$ olmalı.

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{1500} f(x)\,dx}_{=0} + \int_{1500}^{2500} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{2500}^{+\infty} f(x)\,dx}_{=0} = 1$$

$$\Rightarrow \int_{1500}^{2500} \frac{a}{x^3}.dx = 1$$

$$\Rightarrow a.\frac{x^{-2}}{-2}\Big|_{1500}^{2500} = -\frac{a}{2}.\left(\frac{1}{(2500)^2} - \frac{1}{(1500)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} = 3.515.625$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 7.031.250}$$ bulunur.

b.) X : Bir ampülün dayanma süresi olsun.

$$p(X \geq 2000) = \int_{2000}^{2500} a.x^{-3}.dx = \frac{a}{-2}.x^{-2}\Big|_{2000}^{2500}$$

$$= \frac{a}{-2}.\left(\frac{1}{2500^2} - \frac{1}{2000^2}\right)$$

$$= -\frac{7031250}{2}.\left(-\frac{2250}{25.000.000}\right)$$

$$= -3.515,625.(-0,00009) = 0,3164 = \%\,31,64$$

olasılıkla, seçilen bir ampül 2000 saatten fazla dayanır.

Örnek: X t.d. nin olasılık yoğunluk fonk.nu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 \le x < 2 \\ 0, & d.h. \end{cases}$$

veriliyor. $Y = X^2$ şeklinde tanımlanan t.d. nin olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm: öncelikle X t.d. nin dağılım fonksiyonunu bulalım:

$x < 0$ için $F(x) = p(X \le x) = 0$

$0 \le x < 2$ " $F(x) = p(X \le x) = \int_0^x f(t)\,dt$

$$= \int_0^x \frac{t}{2}\,dt = \frac{t^2}{4}\Big|_0^x = \frac{x^2}{4} \text{ "}$$

$x \ge 2$ " $F(x) = p(X \le x) = 1$

$\Rightarrow F(x) \ge F(2) = p(X \le 2) = 1 \Rightarrow F(x) = 1$

diğer yönden $F(x) = p(X \le x) \le 1$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{4}, & 0 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

yazılır. Y t.d. nin dağılım fonksiyonu,

$$G(y) = p(Y \le y) = p(X^2 \le y) = p(X \le \sqrt{y})$$

$$= \int_0^{\sqrt{y}} \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{4}\Big|_0^{\sqrt{y}} = \frac{y}{4} \text{ olur.}$$

$$g(y) = \frac{\partial}{\partial y}(G(y)) = G'(y) = \frac{1}{4} \text{ " bulunur.}$$

Sınırlar $x = 0 \Rightarrow y = x^2 = 0$
$x = 2 \Rightarrow y = 4$ olur.

$$\Rightarrow g(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 < y < 4 \\ 0, & d.h. \end{cases}$$

elde edilir.

Örnek: X t.d. için o.y.f.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0, & d.h. \end{cases}$$

verilsin. $Y = 5X - 2$ t.d. için $g(y) = ?$

Çözüm: Bir önceki örnekte X, t.d. için ~~kümülatif~~ dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

bulunmuştu. Y t.d. için dağılım fonk.

$$G(y) = p(Y \leq y) = p(5X - 2 \leq y)$$

$$= p\left(X \leq \frac{y+2}{5}\right) = \int_0^{\frac{y+2}{5}} \frac{x}{2} \cdot dx = \left.\frac{x^2}{4}\right|_0^{\frac{y+2}{5}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{y+2}{5}\right)^2 \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow g(y) = G'(y) = \frac{1}{\cancel{4}_2} \cdot \cancel{2} \cdot \left(\frac{y+2}{5}\right) \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{50} \cdot (y+2)$$

bulunur. Sınırlar,

$$x = 0 \Rightarrow Y = 5X - 2 = -2$$
$$x = 2 \Rightarrow Y = 5X - 2 = 10 - 2 = 8$$

$$\Rightarrow g(y) = \begin{cases} \frac{1}{50} \cdot (y+2), & -2 < y < 8 \\ 0, & d.h. \end{cases}$$

Diğer yandan, Bulunan $g(y)$'nin o.y.f. olduğu gösterilebilir, $g(y) \geq 0$ ve $\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, dy = 1$ olmalı.

$$\Rightarrow \int_{-2}^{8} \frac{1}{50} \cdot (y+2)\, dy \overset{?}{=} 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{50} \cdot \left.\left(\frac{y^2}{2} + 2y\right)\right|_{-2}^{8} = \frac{1}{50} \cdot (32 + 16 - 2 + 4) = \frac{50}{50} = 1$$

$g(y)$ bir o.y.f. dır.